1º BAC.

TEMA 5: VECTORES

Índice

5.1. VECTORES EN R^2

Al establecer la velocidad de un móvil es necesario conocer su valor numérico, pero también su dirección y sentido.

Para conocer algunas magnitudes físicas no es suficiente con medir su valor numérico, sino también la dirección y el sentido de las mismas. Estas magnitudes físicas se denominan **magnitudes vectoriales** y se determinan mediante **vectores**.

Un **vector fijo del plano** queda determinado por un par de puntos del plano dados en un orden. El primer punto, ***A***, se denomina **origen del vector** y el segundo, ***B***, **extremo del vector**. Se representan geométricamente mediante una flecha que va del origen A al extremo B y se designan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

El **vector nulo** es el vector en el que el extremo coincide con el origen.

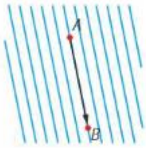
Ejemplos ▸

Vector $\overrightarrow{AB}$: origen el punto A, extremo el punto B

Vector $\overrightarrow{CD}$: origen el punto C, extremo el punto D

Elementos de un vector fijo del plano

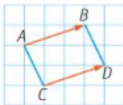
- El **módulo del vector** $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ es la distancia que separa a su extremo de su origen. Su valor es un número real positivo o nulo. Se representa por $|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}|$.
- La **dirección del vector** $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, siendo $\overrightarrow{AB}$ no nulo, es la de la recta que contiene a su extremo y a su origen. La dirección queda determinada por una recta y todas sus paralelas.
- El **sentido del vector** $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, siendo $\overrightarrow{AB}$ no nulo, es el que va desde su origen ***A*** hasta su extremo ***B***. En cada dirección, se pueden considerar dos sentidos.



Vectores fijos equipolentes

Dos vectores no nulos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **equipolentes** cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Al unir los orígenes A y C y los extremos B y D de dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ equipolentes, se obtiene el paralelogramo $ACDB$.

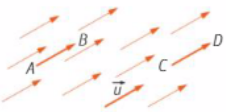


Vectores libres del plano

Dado un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ del plano, al conjunto formado por todos los vectores equipolentes a él se denomina **vector libre del plano**.

Cada uno de los vectores fijos que conforman un vector libre se denomina **representante del vector libre**.

Cualquiera de los vectores de la figura de la izquierda, son representantes de un mismo vector libre. En adelante, y por comodidad, un vector libre se designará mediante uno de sus representantes o mediante una única letra minúscula: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\vec{u}$.



Propiedad de los vectores libres

La idea intuitiva de vector libre es la de un vector fijo que puede desplazarse por el plano libremente, con la única condición de que no puede variar ninguno de sus elementos: ni el módulo, ni la dirección ni el sentido. Por tanto, dado un vector libre $\vec{u}$ para cada punto del plano A, B, C,... existe un único representante de $\vec{u}$ que tiene como origen ese punto.

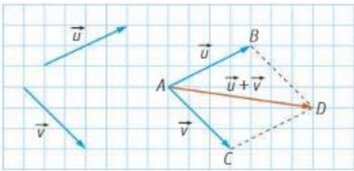
Suma de dos vectores libres

La suma gráfica de dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ puede realizarse mediante dos procedimientos diferentes que producen el mismo resultado:

1.º Se toma un representante $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ y otro $\overrightarrow{AC}$ de $\vec{v}$, ambos con un mismo origen, por ejemplo A.

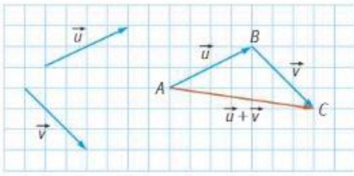
2.º Se construye el paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. El cuarto vértice de este paralelogramo es el punto D.

3.º La suma de vectores $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector libre que tiene como uno de sus representantes al vector de origen A y extremo D:



1.º Se toma un representante $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ y otro $\overrightarrow{BC}$ de $\vec{v}$, de forma que el extremo B del representante de $\vec{u}$ coincida con el origen del representante de $\vec{v}$.

2.º La suma de vectores $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector libre que tiene como uno de sus representantes al vector de origen A y extremo C:



Producto de un número real por un vector libre

El producto de un número real $k \neq 0$ por un vector libre $\vec{u}$, no nulo, es otro vector, $k\vec{u}$, cuyos elementos son:

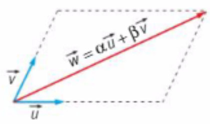
Módulo: $|k\vec{u}|=|k||\vec{u}|$ **Dirección** de $k\vec{u}$: La misma que la de $\vec{u}$

Sentido de $k\vec{u}$: El mismo que el de $\vec{u}$ si k es positivo y el contrario si k es negativo.

Si $k=0$ o $\vec{u}$ es el vector nulo, el producto es el vector nulo.

Al conjunto de todos los vectores del plano, en el que se han definido las dos operaciones básicas de la suma y el producto por números reales, se le denomina **plano vectorial** y se le nombra con $\mathbf{V^2}$.

5.2. BASES Y COORDENADAS



Anteriormente, se ha expresado un vector como un conjunto de operaciones algebraicas con otros

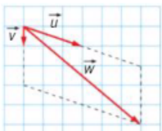
Una **combinación lineal** de los vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es cualquier expresión algebraica de la forma $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ donde α y β son números reales cualesquiera.

También se pueden considerar combinaciones lineales de tres o más vectores.

Vectores linealmente dependientes

Dos o más vectores libres son **linealmente dependientes**, si alguno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los otros.

Cuando un conjunto de vectores no son linealmente dependientes se dice que son **linealmente independientes**.



Ejemplo ▸ ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de la figura?

En la figura de la izquierda se aprecia que $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$.

Como se ha encontrado una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que da como resultado el vector $\vec{w}$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

En V^2:

- Un conjunto de tres o más vectores son siempre linealmente dependientes.
- Dos vectores no nulos son linealmente independientes si no tienen la misma dirección. Si tienen la misma dirección, son linealmente dependientes.

Bases de V^2

Si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ libres no nulos del plano tienen diferente dirección, es decir son linealmente independientes, cualquier otro vector $\vec{w}$ se puede expresar como combinación lineal de ellos:

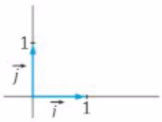
$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

En este caso, se dice que $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una **base de V^2** y que (α, β) son las **coordenadas de $\vec{w}$** respecto de esa base.

Si los vectores que forman una base cualquiera, y en particular de V^2, son perpendiculares, se dice que la base es una **base ortogonal**, si además son unitarios, la base es **ortonormal**.

Ejemplo ▸ En la figura dela izquierda, las coordenadas de $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ respecto a $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ son:

$\vec{a} = -\vec{u} + 2\vec{v} \Rightarrow \vec{a} = (-1, 2)$ $\quad \vec{b} = -3\vec{u} + \vec{v} \Rightarrow \vec{b} = (-3, 1)$ $\quad \vec{c} = 3\vec{u} - 3\vec{v} \Rightarrow \vec{c} = (3, -3)$



Base canónica de V^2

La **base canónica de V^2** está formada por dos vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$, unitarios (de módulo la unidad) y perpendiculares entre sí. Al ser unitarios y perpendiculares se trata de una base ortonormal.

Suma de vectores libres dados por sus coordenadas

Si las coordenadas de dos vectores respecto de una base cualquiera son $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, las coordenadas del vector suma son: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

Ejemplo ▸ Si $\vec{u} = (-3, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 3) \Rightarrow \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (-3-2, 2+3) = (-5, 5)$

Producto de un número real por un vector libre dado por sus coordenadas.

Si las coordenadas de un vector respecto de una base cualquiera, son $\vec{u}=(u_1, u_2)$, las coordenadas del vector producto de un número real, λ, por el vector son: $\lambda\vec{u}=(\lambda u_1, \lambda u_2)$

Si dos vectores son linealmente dependientes, sus coordenadas son proporcionales.

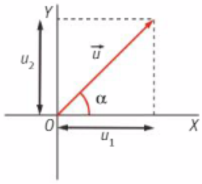
Ejemplo ▸ Halla las coordenadas del vector $3\vec{u}$ siendo $\vec{u}=(-4, 5)$.

$3\vec{u}=3(-4,\ 5)=(-12,\ 15)$

Ten en cuenta

Aunque se trate de vectores, las operaciones de suma y producto por un escalar tienen las mismas propiedades que las operaciones con números reales: conmutativa, asociativa y distributiva.

Módulo y argumento de un vector



Dado un vector libre $\vec{u}$ cuyas coordenadas respecto de la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ son $\vec{u}=(u_1, u_2)$:

El **módulo** del vector es la distancia que separa al origen del extremo de cualquiera de sus representantes. Se puede calcular mediante la expresión:

$$|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$$

Se llama **argumento** del vector al ángulo que forma dicho vector con la parte positiva del eje *X*. Se representa por α o $\arg(\vec{u})$ y se puede calcular mediante la expresión:

$$\alpha=\arg(\vec{u})=\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}$$

El módulo de cualquier vector debe ser un número real positivo o nulo.

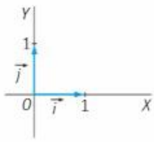
El ángulo correspondiente al vector se debe elegir teniendo en cuenta el cuadrante al que pertenece el vector representante del vector libre teniendo en cuenta sus coordenadas.

Ejemplo ▸ Calcula el módulo y el argumento del vector $\vec{u}=(-\sqrt{3},\ 1)$:

$$|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{-\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$$ ya que pertenece al 2.º cuadrante.

5.3. SISTEMA DE REFERENCIA EUCLÍDEO



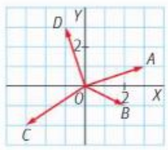
Sistema de referencia euclídeo

Un **sistema de referencia del plano euclídeo** $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ está formado por un punto O(0, 0), llamado origen de coordenadas, y la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Vector de posición

Un vector fijo del plano es un **vector de posición** cuando su origen es el punto O.

Ejemplo ▸



Las coordenadas de los vectores de posición $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ respecto de la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ son:

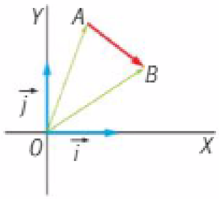
$\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OA}=(3,\ 1)$ $\quad \overrightarrow{OC}=-3\vec{i}-2\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OC}=(-3,\ -2)$

$\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OB}=(2,\ -1)$ $\quad \overrightarrow{OD}=-\vec{i}+3\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OD}=(-1,\ 3)$

Las **coordenadas de un punto *P*** en el sistema de referencia euclídeo $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ son las coordenadas del vector de posición que tiene como extremo dicho punto *P*.

Así, las coordenadas de los puntos *A*, *B*, *C* y *D* del ejemplo anterior en el sistema de referencia euclídeo $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ son: *A*(3, 1), *B*(2, −1), *C*(−3, −2) y *D*(−1, 3)

Coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$



Del dibujo podemos deducir que: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1,\ b_2) - (a_1,\ a_2) = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)$$

Las **coordenadas de un vector $\overrightarrow{AB}$** de origen $A(a_1, a_2)$ y extremo $B(b_1, b_2)$ son las del extremo menos las del origen.

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)$$

Ejemplo ▸ Las coordenadas del vector que tiene por origen el punto $A(3, -2)$ y extremo el punto $B(-2, 1)$ son $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (-2-3, 1-(-2)) = (-5, 3)$.

Coordenadas del punto medio de un segmento

Las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ son:

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2},\ \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

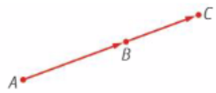
La expresión anterior se demuestra considerando $M(m_1, m_2)$ el punto medio de un segmento AB y tomando los vectores $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{MB}$ como en la figura:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2) = 2(m_1 - a_1,\ m_2 - a_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 - a_1 = 2m_1 - 2a_1 \Rightarrow m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} \\ b_2 - a_2 = 2m_2 - 2a_2 \Rightarrow m_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} \end{cases}$$

Puntos alineados

Tres puntos, A, B y C están **alineados** si y solo si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen la misma dirección, es decir, si sus coordenadas son proporcionales.



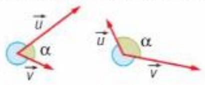
Ejemplo ▸ ¿Están alineados los puntos $A(-1, 0)$, $B(2, 2)$ y $C(5, 4)$?

Sí lo están, ya que $\overrightarrow{AB} = (3, 2)$ y $\overrightarrow{AC} = (6, 4)$ y, por tanto, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

5.4. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES LIBRES. ÁNGULO DE DOS VECTORES

Ten en cuenta

El ángulo que forman dos vectores es el menor de los dos ángulos que determinan dos representantes de dichos vectores con un mismo origen.

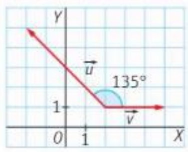


El **producto escalar de los vectores** $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos es el número real que se obtiene al multiplicar el producto de los módulos de dichos vectores por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$$

Cuando uno de los vectores, o los dos, es el vector nulo, el producto escalar vale 0.

Ejemplo ▸ ¿Cuánto vale el producto escalar de los vectores de la figura?



$$|\vec{u}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = 3$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha = 4\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -12$$

Ten en cuenta

La operación del producto escalar de dos vectores siempre está indicada mediante un punto y no se puede prescindir de él.

$\vec{u} \cdot \vec{v}$

Propiedades del producto escalar

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
3. $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v})$
4. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
5. Dos vectores no nulos son perpendiculares si y solo si su producto escalar es 0.

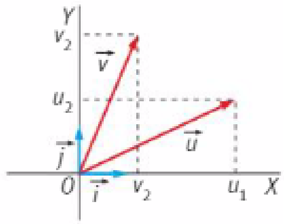
Estas propiedades se demuestran a partir de la definición, por ejemplo, en el caso de la última:

- Si los vectores son perpendiculares forman un ángulo de 90° y, por tanto, el coseno del ángulo que forman es 0.
- De forma inversa, si el producto escalar es nulo es que alguno de sus factores es nulo. Como los vectores tienen módulo no nulo, debe verificarse que $\cos\alpha = 0$ y, por tanto, el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ mide 90°.

Expresión analítica del producto escalar en la base canónica

Tomando como base de V^2 la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, se verifica que:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}|\cos 0° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$
$$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}||\vec{j}|\cos 0° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = |\vec{i}||\vec{j}|\cos 90° = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$



Si se toman dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ pueden expresarse de la forma:

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} \qquad \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$$

Por tanto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j}) \cdot (v_1\vec{i} + v_2\vec{j}) = u_1v_1\vec{i} \cdot \vec{i} + u_1v_2\vec{i} \cdot \vec{j} + u_2v_1\vec{j} \cdot \vec{i} + u_2v_2\vec{j} \cdot \vec{j} = u_1v_1 + u_2v_2$$

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ expresados en la **base canónica** $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ es igual a:

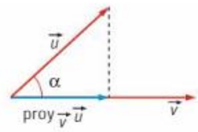
$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2}$$

Ejemplo › Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (-1, 4)$ y $\vec{v} = (3, -2)$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \cdot 3 + 4(-2) = -3 - 8 = -11$

Interpretación geométrica del producto escalar

En la figura aparecen dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ representada por $\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}$.



En el triángulo rectángulo que determinan se observa que $\cos\alpha = \dfrac{|\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}|}{|\vec{u}|}$ y si se sustituye en la expresión del producto escalar de los dos vectores:

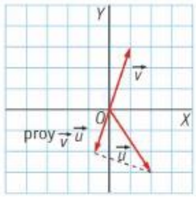
$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}||\cos\alpha| = |\vec{u}||\vec{v}|\cdot\frac{|\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}|}{|\vec{u}|} = |\vec{v}||\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}| \Rightarrow \quad \boldsymbol{|\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}}$$

El vector $\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}$ tiene el mismo sentido que $\vec{v}$ si $\alpha = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ es agudo. En caso contrario, que sea obtuso, $\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}$ tiene sentido opuesto a $\vec{v}$. En este caso el resultado anterior también es válido y se demostraría de forma análoga.

Ejemplo ▸ **Calcula el valor del módulo de la proyección de $\vec{u} = (2, -3)$ sobre $\vec{v} = (1, 4)$.**

$$|\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|2\cdot 1 - 3\cdot 4|}{\sqrt{1^2+4^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{17}} = \frac{10\sqrt{17}}{17}$$

Como $\vec{u}\cdot\vec{v} = -10 < 0 \Rightarrow \cos\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in (90°, 180°]$ el vector proyección tiene sentido opuesto a $\vec{v}$.



Ángulo formado por dos vectores

Si en la expresión del producto escalar se despeja el coseno del ángulo, se obtiene:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\,\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

El **ángulo formado por dos vectores** $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ puede calcularse mediante la expresión:

$$\alpha = \textbf{arccos}\left(\frac{\boldsymbol{u_1v_1 + u_2v_2}}{\boldsymbol{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\,\sqrt{v_1^2+v_2^2}}}\right)$$

Ejemplo ▸ Calcula el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{v} = (1, 4)$.

$$\alpha = \arccos\frac{2\cdot 1 - 3\cdot 4}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\,\sqrt{1^2+4^2}} = \arccos\frac{-10}{\sqrt{13}\,\sqrt{17}} \simeq 132°\,16'$$