1º BAC.

TEMA 3: TRIGONOMETRÍA

Índice

3.1. Medida de ángulos. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

<u>DEFINICIÓN:</u> Grado sexagesimal es la medida del ángulo central que resulta de dividir la circunferencia en 360 partes iguales. A su vez, cada grado se divide en 60 minutos, y cada minuto, en 60 segundos.

<u>DEFINICIÓN:</u> Radián es la medida del ángulo central de una circunferencia cuyo arco mide la longitud del radio. Se simboliza por rad.

Si en una circunferencia de radio r, un ángulo central de arco r mide 1 radián, el ángulo completo de arco $2\pi r$ medirá:

$$2\pi r/r = 2\pi$$

La equivalencia entre grados sexagesimales y radianes se deduce de la medida del ángulo completo en ambas unidades:

$360° = 2\pi$ rad.

$180° = \pi$ rad.

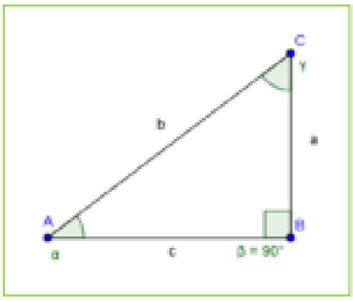
Actividades propuestas

1. Expresa en radianes las siguientes medidas: 60º, 120º, 225º, 330º.
2. Expresa en grados sexagesimales: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{10\pi}{6}$ radianes.
3. ¿Cuánto suman (en radianes) los ángulos de un triángulo? ¿Cuánto mide un ángulo recto en radianes?
4. Para ver la utilidad de los radianes, supongamos un móvil que se mueve en una circunferencia de dos metros de radio con una velocidad de 4 m/s. Calcula su velocidad en rad/s y en grados por segundo. ¿cuántas vueltas da por minuto?
5. Un móvil ha recorrido 3 rad en una circunferencia de radio 2 m. ¿Cuánto espacio ha recorrido? ¿Y si la circunferencia tuviera radio 0'5 m?
6. Hemos recorrido 40 grados de una circunferencia de radio 2 m. ¿cuánto espacio hemos recorrido? ¿y si tuviera radio 0'5 m? ¿Es más fácil o más difícil que hacerlo con radianes?

Razones trigonométricas de ángulos agudos

Ya has visto el año pasado cómo se definían las razones trigonométricas en un triángulo. Nos limitaremos por tanto a recordar cómo se hacían y a introducir la notación que vamos a seguir en este capítulo.

Los vértices de un triángulo los representaremos con letras mayúsculas, empezando el alfabeto (A, B, C,...). El lado opuesto a cada vértice lo representaremos con la letra minúscula correspondiente a dicho vértice (a, b, c...). A su vez el ángulo correspondiente a cada vértice lo representaremos con la letra griega que toque, empezando el alfabeto griego (α, β, γ...).



- En el vértice A está el ángulo α y opuesto a él, el lado a.
- En el vértice B está el ángulo α y opuesto a él, el lado b.
- En el vértice C está el ángulo α y opuesto a él, el lado c.

- El **seno** del ángulo agudo alfa es el cociente entre el cateto opuesto a alfa (ordenada) y su hipotenusa.
- El **coseno** del ángulo agudo alfa es el cociente entre el cateto contiguo (abscisa) a alfa y su hipotenusa.
- La **tangente** del ángulo alfa es el cociente entre los catetos opuesto y contiguo a alfa.

$$sen(\alpha)=\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}=\frac{a}{b} \qquad \cos(\alpha)=\frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa}=\frac{c}{b}$$

$$tg(\alpha)=\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo}=\frac{a}{c}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{b}\right)}=\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

Libro página 75:

El **seno** del ángulo agudo $\hat{B}$ es el cociente entre el cateto opuesto a $\hat{B}$ y su hipotenusa.

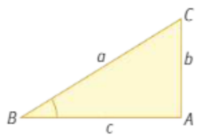
$$\text{sen}\,\hat{B}=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{b}{a}$$

El **coseno** del ángulo agudo $\hat{B}$ es el cociente entre el cateto contiguo a $\hat{B}$ y su hipotenusa.

$$\cos\hat{B}=\frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}=\frac{c}{a}$$

La **tangente** del ángulo agudo $\hat{B}$ es el cociente entre los catetos opuesto y contiguo a $\hat{B}$.

$$\text{tg}\,\hat{B}=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}=\frac{b}{c}$$



Razones inversas:

$$\sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)} \qquad \cos ec(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)} \qquad \cot g(\alpha)=\frac{1}{tg(\alpha)}$$

3.2. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

A veces, hay que considerar ángulos mayores de 360º e incluso ángulos negativos.

Ejemplo: Para abrir una cerradura hay que girar la llave dos vueltas y media a la izquierda, será necesario girarla un ángulo de 360º·2,5 = 900º. Para cerrarla del todo de nuevo, hay que girar la llave 900º a la derecha. Este último ángulo se puede simbolizar por - 900º para indicar que el giro es en sentido contrario al utilizado para abrir la cerradura.

Representación de ángulos

Se utiliza una circunferencia de radio= 1 centrada en el origen de coordenadas cartesianas llamada **circunferencia goniométrica**.

Los ángulos se empiezan a contar **SIEMPRE** desde el semieje positivo de abscisas:

- En el sentido contrario a las agujas del reloj si son positivos.
- En el sentido de las agujas del reloj si son negativos.

A todo ángulo negativo o mayor de 360º se le puede **asociar un ángulo positivo entre 0º y 360º** llamado <u>ángulo reducido del primero</u>.

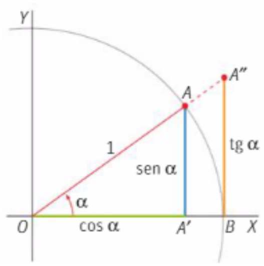
Ejemplo: Calcula el ángulo reducido de 1000º. El cociente de dividir 1000 entre 360 es 2 y el resto es 280. Lo que significa que el ángulo reducido es 280º pues al quitar dos vueltas a 1000º quedan 280º.

Un ángulo y su correspondiente ángulo reducido tienen LAS MISMAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS y la MISMA REPRESENTACIÓN en la circunferencia goniométrica.

El plano que contiene la circunferencia goniométrica se divide en cuatro cuadrantes, y el ángulo reducido α en función de su valor estará en:

Primer cuadrante (I)	Segundo cuadrante (II)	Tercer cuadrante (III)	Cuarto cuadrante (IV)
$0° < \alpha < 90°$ $0 \text{ rad} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$90° < \alpha < 180°$ $\frac{\pi}{2} \text{ rad} < \alpha < \pi \text{ rad}$	$180° < \alpha < 270°$ $\pi \text{ rad} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$	$270° < \alpha < 360°$ $\frac{3\pi}{2} \text{ rad} < \alpha < 2\pi \text{ rad}$

Razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante:



En la figura se aprecia un arco de circunferencia de radio unidad y un ángulo α del primer cuadrante que determina los puntos *A*, *A′* y *A″*. Las razones trigonométricas de α se definen con ayuda de las coordenadas cartesianas de dichos puntos.

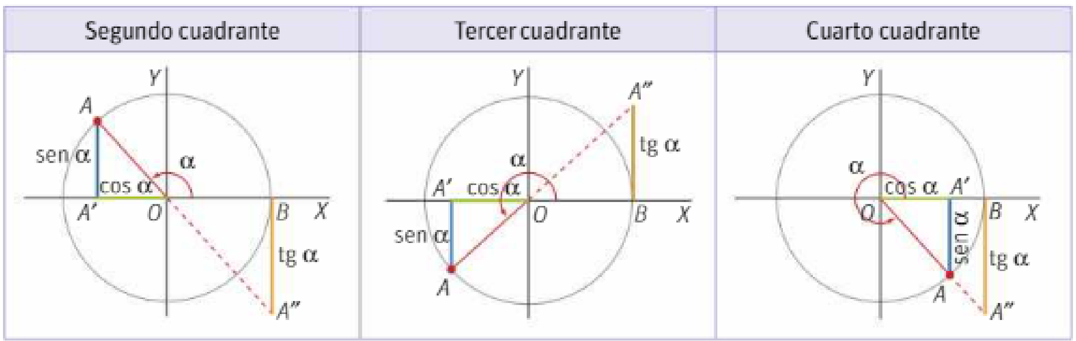
El valor del **seno** del ángulo α coincide con el valor de la **ordenada** del punto ***A***: **sen** $\alpha = AA'$
El valor del **coseno** del ángulo α coincide con el valor de la **abscisa** del punto ***A***: **cos** $\alpha = OA'$
El valor de la **tangente** del ángulo α coincide con el valor de la **ordenada** de ***A″***: **tg** $\alpha = A''B$

Al tratarse de una ordenada por encima del eje horizontal y una abscisa a la derecha del vertical, las tres razones tienen valor positivo.

De esta forma, las **coordenadas del punto *A*** de la circunferencia goniométrica que determina al ángulo α son ***A*(cos** α, **sen** α).

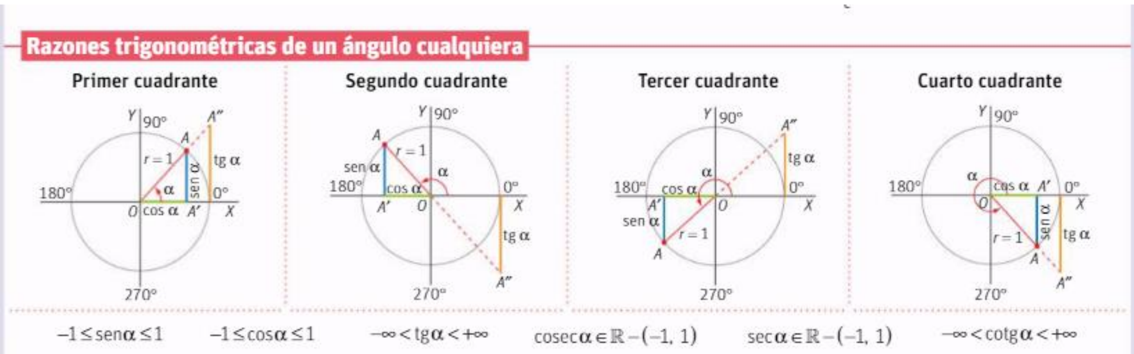
Razones trigonométricas de un ángulo en el resto de cuadrantes:

Las definiciones anteriores se pueden extender a cualquier ángulo de otro cuadrante.



Observando las coordenadas de *A*(cosα, senα) en cada cuadrante, se pueden determinar los signos de las razones en cada uno de ellos. En la figura de la derecha se muestran dichos signos.

Resumen de los cuatro cuadrantes:

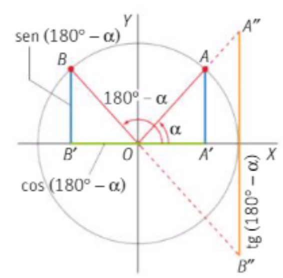


En la tabla se muestran los valores de algunas razones trigonométricas de ángulos importantes:

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No definida	0	No definida	0

3.3. Reducción al primer cuadrante de las razones trigonométricas

<u>Ángulos suplementarios</u>



En la figura aparecen dos ángulos suplementarios: $\widehat{XOA} = \alpha$ y $\widehat{XOB} = 180° - \alpha$.

Los puntos *A* y *B* son simétricos respecto del eje de ordenadas y, por tanto, los triángulos *AOA'* y *BOB'* son iguales. En consecuencia, se puede asegurar que:

$\mathrm{sen}(180° - \alpha) = \mathrm{sen}\,\alpha$	$\mathrm{sen}(\pi - \alpha) = \mathrm{sen}\,\alpha$
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

Mediante este procedimiento se pueden reducir las razones trigonométricas de los ángulos del segundo cuadrante al primero.

<u>**Tabla de conversión:**</u>

Del 1er al 2º cuadrante: 180 – α

Del 1er al 3er cuadrante: 180 + α

Del 1er al 4º cuadrante: 360 – α

Del 2º al 1er cuadrante: 180 – α

Del 3er al 1er cuadrante: α – 180

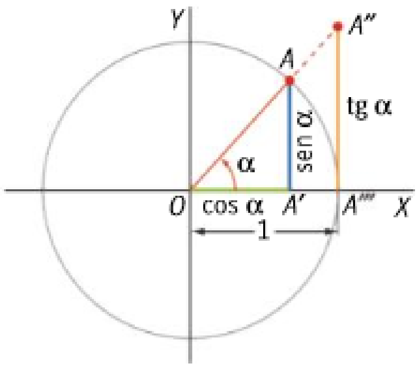
Del 4º al 1er cuadrante: 360 – α

Reducción al primer cuadrante de las razones trigonométricas

$\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha$	$\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{sen}(360° - \alpha) = \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
$\cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}(360° - \alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

3.4. Relaciones entre las razones trigonométricas

En la figura se representa en la circunferencia goniométrica un ángulo α y sus razones trigonométricas:



A veces, se necesita obtener el valor de una razón trigonométrica de un cierto ángulo conociendo otra de sus razones.

- Si se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo *A′OA* se obtiene la **relación fundamental de la trigonometría**:

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1^2 \Rightarrow \boldsymbol{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

- Aplicando el teorema de Tales a los triángulos semejantes *A′OA* y *A‴OA″* se obtiene la relación:

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{A''A'''}{OA'''} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1} \Rightarrow \boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

- Si se dividen los dos miembros de la primera relación por $\cos^2\alpha$ se obtiene:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \boldsymbol{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha}$$

- Y análogamente, dividiéndolos por $\operatorname{sen}^2\alpha$ se obtiene:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \boldsymbol{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha}$$

MUY IMPORTANTE:

EJERCICIOS RESUELTOS

18. Sabiendo que α es un ángulo del primer cuadrante ($0° < \alpha < 90°$) y que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$, calcula el valor de las demás razones trigonométricas de α.

Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones trigonométricas son positivas.

Si se aplica la relación fundamental $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{3}{2}$$

19. Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = -3$ y que $\alpha \in \mathrm{II}$, calcula $\cos\alpha$.

El coseno y su razón inversa, la secante, son negativos en el segundo cuadrante.

$$\sec\alpha = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+(-3)^2} = -\sqrt{10} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

3.5. Razones trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$
$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

3.6. Razones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad

Ángulo doble:

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$
$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$
$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

3.7. Transformación de sumas en productos

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \, . \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \, . \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \, . \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \, . \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

3.8. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas

Una **ecuación trigonométrica** es aquella en la que la incógnita es el ángulo que se quiere averiguar.

Este tipo de ecuaciones cuenta habitualmente con infinitas soluciones que se pueden expresar en grados sexagesimales o en radianes.

Una vez determinado el cuadrante en el que se encuentra el ángulo, se pueden hallar las soluciones a partir de las operaciones **arco seno**, **arco coseno** y **arco tangente** que permiten calcular un ángulo, a partir de la razón correspondiente, y que se representan como: **arcsen**, **arccos** y **arctg**.

NOTA IMPORTANTE:

Las calculadoras científicas permiten calcular las razones trigonométricas de un ángulo. Las razones inversas se calculan dividiendo la unidad entre la razón correspondiente.

Las funciones $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ de las calculadoras permiten hallar el ángulo al que corresponde una determinada razón trigonométrica, aunque no el cuadrante al que pertenece.

Ejemplo Resuelve la ecuación $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Por ser un seno positivo, el ángulo x debe pertenecer al primero o al segundo cuadrante, por tanto, la ecuación tiene dos soluciones entre 0 y 2π radianes:

$$x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ y } x = \frac{2\pi}{3}$$

Todas las demás soluciones se obtienen a partir de las anteriores sumando o restando vueltas completas:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ y } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \text{ es cualquier número entero } (k \in \mathbb{Z})$$

Ejercicio 47 pág. 85:

47. Resuelve las siguientes ecuaciones y da los resultados en grados y en radianes.

a) $\operatorname{sen} x = 1$ **b)** $2\cos x + 1 = 0$ **c)** $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0$

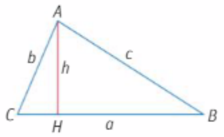
a) El seno de un ángulo vale 1 en 90º, 450º, 810º, etc.

Por tanto $x = 90º + 360ºk$ con $k \in \mathbb{Z}$ o, en radianes, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

b) $$2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120º + 360º k = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ x = 240º + 360º k = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}.$$

c) $$\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30º + 180º k = \frac{\pi}{6} + \pi k \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

3.9. Teoremas del seno y coseno. Resolución de triángulos



Teorema del seno

En cualquier triángulo ABC se verifica que: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$

Se puede demostrar considerando h la altura sobre el lado BC.

Los triángulos AHC y ABH son rectángulos en H y por tanto:

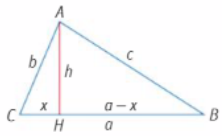
$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b\operatorname{sen}\hat{C} \\ \operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{h}{c} \Rightarrow h = c\operatorname{sen}\hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow b\operatorname{sen}\hat{C} = c\operatorname{sen}\hat{B} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Las otras igualdades se demuestran de igual forma con las otras alturas del triángulo ABC.

Teorema del coseno

En cualquier triángulo *ABC* se verifica que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$



Para demostrarlo se considera la altura h sobre el lado BC, que determina el segmento.

El triángulo *AHC* es rectángulo en H, y por el teorema de Pitágoras: $h^2 = b^2 - x^2$

El triángulo *ABH* es rectángulo en H, y por el teorema de Pitágoras: $c^2 = h^2 + (a - x)^2$

Si se sustituye la primera relación en la segunda, se obtiene: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$

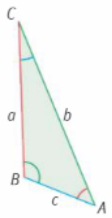
Como $\cos\hat{C} = \dfrac{x}{b} \Rightarrow x = b\cos\hat{C} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

Las otras igualdades se demuestran de igual forma con las otras alturas de *ABC*.

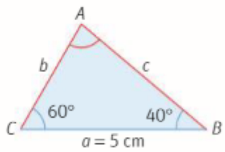
Resolución de triángulos

Resolver un triángulo es calcular sus elementos desconocidos utilizando los conocidos.

En la tabla se recogen los casos que pueden darse a la hora de resolver triángulos en función de los datos que se conocen, y también uno de los procedimientos posibles para dicha resolución:

	I. Dos ángulos y un lado	II. Dos lados y el ángulo comprendido	III. Dos lados y un ángulo no comprendido	IV. Tres lados
	• Tercer ángulo con: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$ • Los otros dos lados con el teorema del seno.	• Tercer lado y un ángulo con el teorema del coseno. • Tercer ángulo con: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$	• Segundo ángulo con el teorema del seno. • Tercer ángulo con: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$ • Tercer lado con el teorema del seno.	• Dos ángulos con el teorema del coseno. • Tercer ángulo con: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$
	Solución única	Solución única	Dos, una o ninguna solución	Una o ninguna solución

51. Resuelve el triángulo tal que $a = 5$ cm, $\hat{B} = 40°$ y $\hat{C} = 60°$.



Se trata del caso I:

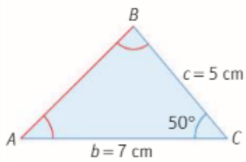
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180° \Rightarrow \hat{A}=180°-40°-60°=80°$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow b=\frac{a\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{5\operatorname{sen}40°}{\operatorname{sen}80°}\simeq 3{,}26 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c=\frac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{5\operatorname{sen}60°}{\operatorname{sen}80°}\simeq 4{,}40 \text{ cm}$$

52. Resuelve el triángulo tal que $a = 5$ cm, $b = 7$ cm y $\hat{C} = 50°$.



Es el caso II. Para calcular la medida del lado c, se aplica el teorema del coseno:

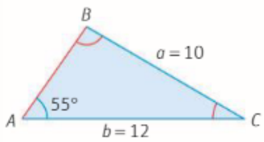
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = 25 + 49 - 70\cos 50° \simeq 29 \Rightarrow c \simeq \sqrt{29} \text{ cm}$$

Para hallar la amplitud del ángulo $\hat{A}$, se vuelve a aplicar el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{49+29-25}{14\sqrt{29}} \simeq 0{,}703$$

$$\hat{A} \simeq \arccos 0{,}703 \simeq 45°\,19'\,55''; \ \hat{B} = 180° - \hat{C} - \hat{A} \simeq 84°\,40'\,5''$$

53. Calcula el área del triángulo de lados $a = 10$ cm, $b = 12$ cm y $\hat{A} = 55°$.



Es el caso III. Aplicando el teorema del seno, se puede calcular el seno del ángulo $\hat{B}$ y, después, el ángulo $\hat{C}$:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b\cdot\operatorname{sen}\hat{A}}{a} = \frac{12\operatorname{sen}55°}{10} \simeq 0{,}983 \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} \simeq 79°\,24'\,53'' \Rightarrow \hat{C} \simeq 45°\,35'\,7'' \\ \hat{B} = 100°\,35'\,7'' \Rightarrow \hat{C} = 24°\,24'\,53'' \end{cases}$$

El área será:

$$\begin{cases} \hat{C} \simeq 45°\,35'\,7'' \Rightarrow A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12\operatorname{sen}45°\,35'\,7'' \simeq 42{,}86 \text{ cm}^2 \\ \hat{C} \simeq 24°\,24'\,53'' \Rightarrow A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12\operatorname{sen}24°\,24'\,53'' \simeq 24{,}80 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

54. Calcula la amplitud del ángulo $\hat{B}$ de un triángulo *ABC* si $a = 14$ cm, $b = 12$ cm y $c = 10$ cm.

Es el caso IV. Despejando $\cos\hat{B}$ en el teorema del coseno:

$$\cos\hat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{196+100-144}{2\cdot 14\cdot 10} = \frac{19}{35} \Rightarrow \hat{B} = \arccos\frac{19}{35} \simeq 57°\,7'\,18''$$