

58. Estudia el número de soluciones que tienen los siguientes sistemas lineales y, en los casos en los que existan, hállalas.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+3z=4 \\ 5x-5y+4z=8 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \\ 8x+y+z=-1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x-y+3z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2y-z=-1 \\ 5x-y-3z=2 \\ x-y+2z=-2 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a)} \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+3z=4 \\ 5x-5y+4z=8 \end{cases} \xrightarrow{\substack{E_2 \rightarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 \rightarrow E_3 - 5E_1}} \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \\ -10y+14z=8 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \rightarrow \frac{E_3}{2} - E_2} \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \end{cases}$$

$$\text{Infinitas soluciones: } \begin{cases} z=t \\ 5y=7z-4=7t-4 \Rightarrow y=\frac{7t-4}{5} \\ x=2z-y=2t-\frac{7t-4}{5}=\frac{3t+4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3t+4}{5} \\ y=\frac{7t-4}{5} \\ z=t \end{cases} \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \\ 8x+y+z=-1 \end{cases} \xrightarrow{\substack{E_2 \rightarrow 5E_2 - 3E_1 \\ E_3 \rightarrow 5E_3 - 8E_1}} \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ -11y+21z=0 \\ -11y+21z=-5 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \rightarrow E_3 - E_2} \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ -11y+21z=0 \\ 0=-5 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución.

$$\text{c)} \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x-y+3z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{E_2 \rightarrow E_2 - E_1 \\ E_3 \rightarrow E_3 - 2E_1}} \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -4y+5z=0 \\ -4y+5z=0 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \rightarrow E_3 - E_2} \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -4y+5z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -4y+5z=0 \end{cases}$$

$$\text{Infinitas soluciones: } \begin{cases} y=t \\ 5z=4y=4t \Rightarrow z=\frac{4t}{5} \\ x=-3y+2z=-3t+\frac{8t}{5}=-\frac{7t}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{7t}{5} \\ y=t \\ z=\frac{4t}{5} \end{cases} \forall t \in \mathbb{R}$$

d) Intercambiamos la primera ecuación con la y tercera.

$$\begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 5x-y-3z=2 \\ 2y-z=-1 \end{cases} \xrightarrow{E_2 \rightarrow E_2 - 5E_1} \begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 4y-13z=12 \\ 2y-z=-1 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \rightarrow 2E_3 - E_2} \begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 4y-13z=12 \\ 11z=-14 \end{cases}$$

$$\text{Una única solución: } \begin{cases} x=-2-\frac{25}{22}+\frac{28}{11}=-\frac{13}{22} \\ y=3-\frac{182}{44}=-\frac{25}{22} \\ z=-\frac{14}{11} \end{cases}$$

59. Resuelve y clasifica en función del número de soluciones los siguientes sistemas lineales.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 3x-3y+z=-14 \\ 5x-y-2z=-15 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 3x-3y-2z=-1 \\ 3x-3y+2z=5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2x+y-z=11 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+y-z=7 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ 5x-y-z=13 \\ 4x-2y-3z=14 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a)} \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 3x-3y+z=-14 \\ 5x-y-2z=-15 \end{cases} \xrightarrow{\substack{E_2 \rightarrow E_2-3E_1 \\ E_3 \rightarrow E_3-5E_1}} \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -11y+8z=-25 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \rightarrow 9E_3-11E_2} \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -5z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$$

Sistema compatible determinado.

$$\text{b)} \begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 3x-3y-2z=-1 \\ 3x-3y+2z=5 \end{cases} \xrightarrow{\substack{E_2 \rightarrow 2E_2-3E_1 \\ E_3 \rightarrow 2E_3-3E_1}} \begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ -18y-z=-2 \\ -18y+7z=10 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \rightarrow E_3-E_2} \begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ -18y-z=-2 \\ 8z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{25}{36} \\ y=\frac{1}{36} \\ z=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Sistema compatible determinado.

$$\text{c)} \begin{cases} 2x+y-z=11 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+y-z=7 \end{cases} \xrightarrow{\substack{E_2 \rightarrow E_2-E_1 \\ E_3 \rightarrow 2E_3-E_1}} \begin{cases} 2x+y-z=11 \\ -3y=-3 \\ y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$$

Sistema compatible determinado.

$$\text{d)} \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ 5x-y-z=13 \\ 4x-2y-3z=14 \end{cases} \xrightarrow{\substack{E_2 \rightarrow 4E_2-5E_1 \\ E_3 \rightarrow E_3-E_1}} \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -3y+2z=9 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \rightarrow 3E_3-E_2} \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -15z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=0 \end{cases}$$

Sistema compatible determinado.