1º BAC.

TEMA 2: ÁLGEBRA

Índice

2.1. OPERACIONES CON POLINOMIOS:

DEFINICIÓN: Un polinomio es la suma o diferencia algebraica de varios monomios. El grado de un polinomio es el grado del término de mayor grado, que se denomina término principal.

2.1.1. Simplificación de polinomios (ejemplos hechos en clase):

Se opera y se agrupan términos semejantes:

a) $2(x-2)^2-3(3x+2)-2(3x-2)(3x+2)=2x^2-8x+8-9x-6-18x^2+8=-16x^2-17x+10$

b) $(3x+2)^2+2(2x-3)^2-(2x-5)(x-5)=9x^2+12x+4+8x^2-24x+18-2x^2+10x+5x-25=15x^2+3x-3$

c) $(2x^2-2x-13)(3x^2-2x)-3x=6x^4-4x^3-6x^3+4x^2-39x^2+26x-3x=6x^4-10x^3-35x^2+23x$

d) $(2x^2-3x+2)(-3x^2+x+1)+(6x-10)x^3=-6x^4+2x^3+2x^2+9x^3-3x^2-3x-6x^2+2x+2+6x^4-10x^3=$

$=x^3-7x^2-x+2$

2.1.2. Suma y diferencia de polinomios

La suma o diferencia de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando o restando los términos semejantes, dejando indicada la suma o diferencia de los términos no semejantes.

Ejemplo:

$P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5$

$Q(x) = 5x^3+2x^2 + 4x$

$P(x) + Q(x) = (-2+5)\, x^3 + (3+2)\, x^2 + 4x + 5 = 3\, x^3 + 5\, x^2 + 4x + 5$

2.1.3. Producto de dos polinomios

El producto de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando los términos del primero por cada uno de los del segundo y simplificando los términos semejantes.

Ejemplo:

$P(x) = 2x^3 - 3x + 5$

$Q(x) = 4x^2 -1$

$P(x)\cdot Q(x) = (2x^3 - 3x + 5) \cdot (4x^2 -1) = 8x^5 - 2x^3 -12x^3 +3x +20x^2 -5 = 8x^5 - 14x^3 + 20x^2 + 3x - 5$

***NOTA: Recordar identidades notables:**

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

2.1.4. División entera de polinomios

<u>* OPCIÓN 1: Dividiendo con "la cajita" (como en primaria):</u>

Ejemplo:

a) $\left(6x^4+7x^3-5x^2-6x-6\right):\left(3x^2+2x+1\right)$

Solución:

Cociente: $2x^2+x-3$

Resto: $-x-3$

<u>* OPCIÓN 2: Dividiendo con la regla de Ruffini</u>

Ejemplo:

a) $\left(-3x^3+2x^2+x-3\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Solución:

a) Cociente: $-3x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{4}$

Resto: $-\frac{21}{8}$

2.2. RAÍCES Y FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO. TEOREMA DEL RESTO Y TEOREMA DEL FACTOR

2.2.1. Raíces de un polinomio

<u>DEFINICIÓN:</u> Las raíces de un polinomio P(x) son los valores x=a para los que el valor numérico del polinomio es 0.

Ejemplo:

$P(x)= -x^2+x+6$

Raíces: x=-2 y x=3 porque P(-2) =P(3)= 0

2.2.2. Factorización de un polinomio

<u>DEFINICIÓN:</u> Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de polinomios del grado más pequeño posible.

PASOS PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO:

1. Sacar factor común

2. Utilización de identidades notables

3. Resolución de la ecuación de 2º grado para polinomios de 2º grado.

4. Utilización de la regla de Ruffini y el teorema del resto para la obtención de las raíces del polinomio.

2.2.3. Teorema del resto

El valor numérico de un polinomio P(x) para x=a coincide con el resto obtenido al dividir P(x) entre x-a.

Por tanto, el resto R = P(a)

Ejemplo:

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3 - x^2 - 3x + 1 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^3 + 8x^2} & 4x^2 + 7x + 11 \\
\qquad 7x^2 - 3x + 1 & \\
\qquad \underline{-7x^2 + 14x} & \\
\qquad\qquad 11x + 1 & \\
\qquad\qquad \underline{-11x + 22} & \\
\qquad\qquad\qquad +23 &
\end{array}
$$

$P(2) = 4\cdot 2^3 - 2^2 - 3\cdot 2 + 1 = 32 - 4 - 6 + 1 = 23$

2.2.4. Teorema del factor

Si x=a es una raíz del polinomio P(x), se verifica que (x-a) es un factor de P(x).

P(x) = (x-a)·Q(x)

Ejemplo:

Calcula el valor de *k* para que el polinomio:

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + k$ sea divisible por $x - 2$.

Por el teorema del factor se tiene: $2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + k = 0 \Rightarrow k + 8 = 0 \Rightarrow k = -8$

2.3. FRACCIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN: Una fracción algebraica es un cociente indicado de dos polinomios siendo el denominador un polinomio no nulo.

2.3.1. Fracciones equivalentes

Dos fracciones algebraicas A(x)/B(x) y C(x)/D(x) son equivalentes si A(x)·D(x) = B(x)·C(x)

2.3.2. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de polinomios

Se calculan de forma análoga al de dos o más números naturales.

Ejemplo:

$P(x) = x^2 + x - 2$ y $Q(x) = x^2 + 2x - 3$

$P(x) = (x-1)(x+2) \qquad Q(x) = (x-1)(x+3)$

$\text{m.c.d.}[P(x), Q(x)] = x - 1 \qquad \text{m.c.m.}[P(x), Q(x)] = (x-1)(x+2)(x+3) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

2.3.3. Simplificación de fracciones algebraicas

DEFINICIÓN: Simplificar una fracción algebraica es obtener otra equivalente más sencilla. Para ello se factorizan numerador y denominador y se eliminan factores comunes. También se pueden dividir numerador y denominador entre m.c.d. de ambas.

Ejemplo:

$$\frac{-2x^4 + 5x^3 - 5x + 2}{2x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 8x - 4}$$

$$\frac{-2x^4 + 5x^3 - 5x + 2}{2x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 8x - 4} = \frac{-(x+1)(x-1)(x-2)(2x-1)}{(x-1)(x+2)^2(2x+1)} = -\frac{(x+1)(x-2)(2x-1)}{(x+2)^2(2x+1)} = \frac{-2x^3 + 3x^2 + 3x - 2}{2x^3 + 9x^2 + 12x + 4}$$

2.3.4. Operaciones con fracciones algebraicas

A. Suma y diferencia de fracciones algebraicas: Se reducen las fracciones a común denominador (m.c.m.) y se opera en el numerador.

B. Producto y cociente de fracciones algebraicas: Se factorizan el numerador y el denominador para simplificar factores primeramente. Después se multiplican numeradores y denominadores con las operaciones con fracciones numéricas.

2.4. ECUACIONES POLINÓMICAS

<u>DEFINICIÓN:</u> Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en la que intervienen uno o más valores desconocidos llamados incógnitas de la ecuación.

<u>DEFINICIÓN:</u> Solución de una ecuación es cualquier conjunto de valores de las incógnitas que al sustituirlo en la ecuación la convierte en una igualdad verdadera.

Dos ecuaciones son EQUIVALENTES si tienen las mismas soluciones.

<u>DEFINICIÓN:</u> Una ecuación polinómica es aquella en la que únicamente intervienen polinomios. Su grado es el máximo grado de los polinomios que la determinan.

Ecuaciones bicuadradas

Ojo! Se resuelven mediante un cambio de variable:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$

se le llama $t = x^2$ y se resuelve $at^2+bt+c=0$. Después se halla x.

Ejemplo:

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 \\ z^2 = x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2 - 17z + 16 = 0 \Rightarrow z = \frac{17 \pm \sqrt{289-64}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2} = \begin{cases} z = 16 \Rightarrow x = 4,\ x = -4 \\ z = 1 \Rightarrow x = 1,\ x = -1 \end{cases}$$

2.5. ECUACIONES RACIONALES

<u>DEFINICIÓN:</u> Las ecuaciones racionales son aquellas en las que aparecen fracciones algebraicas.

En este tipo de ecuaciones, **<u>se deben comprobar las soluciones.</u>**

Ejemplo:

$$\frac{2x}{x-2} + \frac{3x}{x+2} = \frac{6x^2}{x^2-4} \Rightarrow 2x(x+2) + 3x(x-2) = 6x^2 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \ \text{ Verdadera} \\ x = -2 \ \text{ Falsa} \end{cases}$$

2.6. ECUACIONES CON RADICALES

<u>DEFINICIÓN:</u> Las ecuaciones con radicales son aquellas en las que la incógnita aparece en alguno de los términos bajo el signo radical.

En este tipo de ecuaciones, **<u>se deben comprobar las soluciones</u>**.

No existe un único método para su resolución, pero se recomienda lo siguiente:

1. Si la ecuación contiene un único radical cuadrático, conviene aislarlo en un miembro y elevar los dos miembros al cuadrado.

2. Si la ecuación contiene más de un radical cuadrático, conviene aislar uno de ellos en un miembro y elevar los dos miembros al cuadrado.

Ejemplo:

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5 \Rightarrow \sqrt{x+4}=5-\sqrt{x-1} \Rightarrow \left(\sqrt{x+4}\right)^2=\left(5-\sqrt{x-1}\right)^2 \Rightarrow x+4=25+x-1-10\sqrt{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{x-1}=20 \Rightarrow \sqrt{x-1}=2 \Rightarrow x-1=4 \Rightarrow x=5$$

2.7. ECUACIONES LOGARÍTMICAS

<u>DEFINICIÓN:</u> Son las ecuaciones en las que la incógnita aparece en la base o en el argumento de un logaritmo.

Para resolverlas, es necesario:

1. Aplicar las propiedades de los logaritmos

2. A veces, se hace un cambio de variable: $z = \log_a x$

En este tipo de ecuaciones, **<u>se deben comprobar las soluciones</u>**, pues no están definidos los logaritmos de números negativos o de cero.

Ejemplo:

$$\log(2x+3)-\log(x-1)=2\log 2+2\log 3 \Rightarrow \log\frac{2x+3}{x-1}=\log\left(2^2\cdot 3^2\right) \Rightarrow \frac{2x+3}{x-1}=36 \Rightarrow 2x+3=36x-36 \Rightarrow x=\frac{39}{34}$$

2.8. ECUACIONES EXPONENCIALES

<u>DEFINICIÓN:</u> Son aquellas en las que la incógnita se halla en el exponente.

Para resolverlas, es necesario:

1. Aplicar las propiedades de las potencias teniendo en cuenta que:

$a^n = a^m$; n=m siendo a distinto de -1 , 0 y 1.

2. A veces, es útil tomar logaritmos en ambos miembros de la ecuación.

3. Otras veces, se hace un cambio de variable: $z = a^x$

Ejemplo:

$$\frac{1}{2^x}=16^{\frac{x(x-1)}{2}} \Rightarrow 2^{-x}=2^{\frac{4x(x-1)}{2}} \Rightarrow -x=2x(x-1) \Rightarrow 2x^2-x=0 \Rightarrow x(2x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

2.9. SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES. MÉTODO DE GAUSS

DEFINICIÓN: Un sistema de ecuaciones está formado por un conjunto de ecuaciones que contienen una o varias incógnitas. Las soluciones de un sistema son los valores que verifican todas las ecuaciones.

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Dado un sistema, se obtiene otro equivalente a él si:

1. se suma o se resta la misma cantidad a los dos miembros de una de sus ecuaciones

2. Se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero.

3. Si se suma o resta a una ecuación un múltiplo de otra.

Los **sistemas de ecuaciones lineales** están compuestos por ecuaciones de primer grado.

En función del número de soluciones que tenga, un sistema puede ser:

a. **Compatible determinado**: tiene solución ÚNICA.

b. **Compatible indeterminado**: tiene infinitas soluciones.

c. **Incompatible**: NO tiene solución.

Resolución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas **se aplica el MÉTODO DE GAUSS**, que consiste en aplicar el método de reducción de forma ESTRUCTURADA para obtener un sistema triangular equivalente.

Pasos del método de Gauss:

1. Reducir la segunda ecuación con ayuda de la primera, para eliminar la primera incógnita.

2. Reducir la tercera ecuación con ayuda de la primera, para eliminar la primera incógnita.

3. Reducir la tercera ecuación con ayuda de la segunda, para que la ecuación modificada sólo contenga la tercera incógnita.

4. Hallar el valor de la tercera incógnita.

5. Sustituir el valor de la tercera incógnita en la segunda ecuación para obtener el valor de la segunda incógnita.

6. Resolver la primera ecuación sustituyendo los dos valores hallados y obtener así el valor de la primera incógnita.

Este método se puede usar en sistemas de 4 o más ecuaciones.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+3z=4 \\ 5x-5y+4z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \\ -10y+14z=8 \end{cases} \Rightarrow E_3 \to \frac{E_3}{2}-E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \end{cases}$$

Infinitas soluciones: $\begin{cases} z=t \\ 5y=7z-4=7t-4 \Rightarrow y=\dfrac{7t-4}{5} \\ x=2z-y=2t-\dfrac{7t-4}{5}=\dfrac{3t+4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3t+4}{5} \\ y=\dfrac{7t-4}{5} \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \\ 8x+y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to 5E_2-3E_1 \\ E_3 \to 5E_3-8E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ -11y+21z=0 \\ -11y+21z=-5 \end{cases} \Rightarrow E_3 \to E_3-E_2 \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ -11y+21z=0 \\ 0=-5 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución.

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 5x-y-3z=2 \\ 2y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow E_2 \to E_2-5E_1 \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 4y-13z=12 \\ 2y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow E_3 \to 2E_3-E_2 \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 4y-13z=12 \\ 11z=-14 \end{cases}$$

Una única solución: $\begin{cases} x=-2-\dfrac{25}{22}+\dfrac{28}{11}=-\dfrac{13}{22} \\ y=3-\dfrac{182}{44}=-\dfrac{25}{22} \\ z=-\dfrac{14}{11} \end{cases}$

2.10. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

<u>DEFINICIÓN:</u> Son aquellos en los que alguna ecuación no es lineal.

No existe un procedimiento concreto de resolución, puede emplearse el método de sustitución o el de reducción, según el caso.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x+y=8 \\ 2x+3y^2=22 \end{cases}$$

$$y=8-2x \Rightarrow 2x+3(8-2x)^2=22 \Rightarrow 2x+192+12x^2-96x=22 \Rightarrow 6x^2-47x+85=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5, \quad y=-2 \\ x=\dfrac{17}{6}, \quad y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

2.11. SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

DEFINICIÓN: **Los sistemas de ecuaciones exponenciales** son aquellos que tienen como mínimo una ecuación exponencial.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$$

$$u = 2^x \,,\; v = 5^y \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 4\cdot 2^x + 5\cdot 5^y = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 9 \\ 4u + 5v = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ v = 5 \Rightarrow 5^y = 5 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

DEFINICIÓN: **Los sistemas de ecuaciones logarítmicas** son aquellos formados por un conjunto de ecuaciones, alguna de las cuales es logarítmica.

Ejemplo:

$$\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$$

Restando las ecuaciones se obtiene: $4\log y = 2 \Rightarrow \log y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $\log x - \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow \log x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{7}{2}} = 10^3\sqrt{10} = 1000\sqrt{10}$

2.12. INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

DEFINICIÓN: Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas en la que intervienen uno o más valores desconocidos llamados incógnitas.

La **SOLUCIÓN de una INECUACIÓN** es el **conjunto de valores** que pueden tomar las incógnitas que hacen que la desigualdad sea verdadera. Dos inecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

2.13. SISTEMAS DE INECUACIONES

DEFINICIÓN: Un sistema de inecuaciones está formado por varias inecuaciones con una o más incógnitas.

Resolución de sistemas de inecuaciones con una incógnita

La solución es la **INTERSECCIÓN de las soluciones** de cada una de las inecuaciones que lo forman.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 1 < x + 2 \\ 3x - 1 \le 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \ge -1 \end{cases} \Rightarrow \text{ Solución: } x \in [-1, 1)$$