TEMA 1: NÚMEROS REALES

ÍNDICE

1. Introducción Números reales

1.1. Números racionales e irracionales

Recuerda que:

Ya conoces los distintos tipos de conjuntos numéricos:

Naturales ➔ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Enteros ➔ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Racionales ➔ $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\right\}$.

Los números racionales también contienen a los números que tienen expresión decimal exacta (0'12345) y a los que tienen expresión decimal periódica (7'01252525...). Si el denominador (de la fracción irreducible) solo tiene como factores primos potencias de 2 o 5 la expresión decimal es exacta. Si el denominador (de la fracción irreducible) tiene algún factor primo que no sea ni 2 ni 5 la fracción tendrá una expresión decimal periódica.

Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica; y toda expresión decimal exacta o periódica se puede escribir en forma de fracción.

Pero ya sabes que existen números que no son racionales. Por ejemplo: $\sqrt{2}$ **no** puede ponerse como fracción. Todos estos números, por ejemplo $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, π ... junto con los números racionales forman el conjunto de los **números reales**. A los números reales que no son números racionales se les llama **números irracionales**.

La expresión decimal de los números irracionales es de infinitas cifras no periódicas.

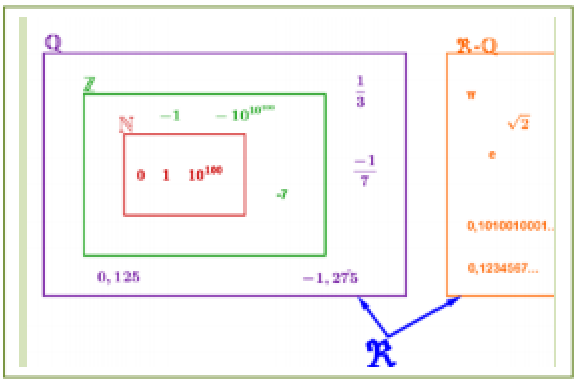
Por tanto

Irracionales ➔ $\mathrm{I} = \Re - \mathbb{Q}$.

El conjunto de los números reales está formado por la unión de los números racionales y de los números irracionales.

Reales ➔ $\Re = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$.

Tenemos por tanto que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \Re$; $\mathrm{I} \subset \Re$



2. Propiedades de la suma y del producto de números reales

<u>Suma:</u>

- ✓ Conmutativa: a+b= b+a
- ✓ Asociativa: a + (b+c) = (a+b) +c
- ✓ Elemento neutro: a+ 0 = a
- ✓ Elemento opuesto: a + (-a) =0

<u>Producto:</u>

- ✓ Conmutativa: a·b= b·a
- ✓ Asociativa: a·(bc) = (ab)·c
- ✓ Elemento neutro: a·1 = a
- ✓ Elemento inverso: a·(1/a) = 1

***Propiedad distributiva del producto respecto de la suma**: a·(b+c)= a·b + a·c

3. Ordenación en R. Desigualdades

Una desigualdad es una expresión numérica o algebraica unida por uno de los cuatro signos de desigualdad: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Por ejemplo:

- $-4 < 2$, $7 \geq x + 1$, $x^2 - 14 \geq x$, $2x + 3y \geq 7$.

Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas.
El grado de una inecuación es el mayor de los grados al que están elevadas sus incógnitas.

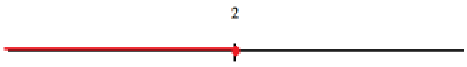
Por ejemplo:

- $7 \geq x + 1$ es una inecuación de primer grado, mientras que $x^2 - 14 \geq x$ es de segundo grado.

Resolver una inecuación consiste en encontrar los valores que la verifican. Éstos se denominan soluciones de la misma.

Por ejemplo:

- $7 \geq x + 5 \Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \Leftrightarrow$



<u>Propiedades de las desigualdades:</u>

- ✓ Si se suma el mismo número real en ambos miembros de una desigualdad, no varía su sentido:

  2≤5 ; 2+(-3) ≤ 5 + (-3) ; -1≤2

- ✓ Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por cualquier número real positivo, NO cambia su sentido:

  2≥-3; 2·8≥(-3)·8 ; 16≥-24

- ✓ Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por cualquier número negativo, el sentido cambia:

  2≤4; 2·(-2)≥4·(-2) ; -4≥-8

4. La recta real. Representación gráfica

- Cada punto de la recta se corresponde con un número real.

- A cada número real le corresponde uno y sólo uno de los puntos de la recta.

<u>Representación de números enteros</u>: se lleva la distancia entre 0 y 1 tantas veces como sea preciso sobre la recta, hacia la derecha si es positivo o hacia la izquierda si es negativo.

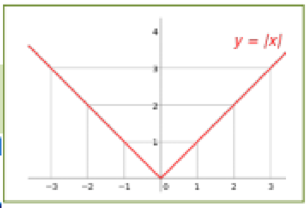
<u>Representación de números racionales</u>: se representan dividiendo segmentos de la recta en partes iguales con ayuda del teorema de Tales.

<u>Representación de números irracionales</u>: Sólo algunos números irracionales pueden representar en la recta real con regla y compás. Ejemplos: raíces de los números naturales, usando el teorema de Pitágoras o el teorema de la altura.

5. Valor absoluto

El valor absoluto o módulo de un número, equivale al valor de ese número ignorando el signo. Por ejemplo, el valor absoluto de –1 es 1, y el valor absoluto de +1, también es 1.
En lenguaje formal, el valor absoluto se define de la siguiente manera.

$$|x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$



Si representamos esta función en un eje de coordenadas, resulta una gráfica como la del margen.
Como el valor absoluto es una función muy importante en matemáticas, tiene su propio símbolo. Para escribir el valor absoluto de un número x, basta con encerrar el número entre dos barras: $|x|$.

El valor absoluto de un número x se consigue suprimiendo el signo, y se anota mediante el símbolo |x|.

Ejemplo:

- El valor absoluto de –32 es 32, igual que el valor absoluto de +32. Escrito en lenguaje formal sería: |–32| = 32 = |+32|.

Actividades propuestas

17. Halla el valor absoluto de los siguientes números: a) 5 b) –5 c) –π

- **¿Para qué sirve?**

El valor absoluto se utiliza principalmente para definir cantidades y distancias en el mundo real. Los números negativos son una construcción matemática que se utiliza en el cálculo, pero en la realidad no existen cantidades negativas. No podemos viajar una distancia de –100 kilómetros, o comer –3 caramelos. Esto se debe a que el tiempo solo discurre en una dirección (positiva por convención), pero eso no entra en el ámbito de las matemáticas, sino en el de la física.
El valor absoluto se usa para expresar cantidades o longitudes válidas en el mundo real, como la distancia.

Ejemplo:

- Hago un viaje de ida y vuelta hasta una ciudad que se encuentra a 40 km de mi casa. Después de hacer el viaje, estoy en el mismo punto, así que mi posición no habrá cambiado, esto es: Posición = 40 km – 40 km = 0

Esto no quiere decir que no haya recorrido una distancia. Hay dos cantidades a tener en cuenta, una distancia de ida y otra de vuelta, en total será: L = |40| km + |–40| km = 80 km

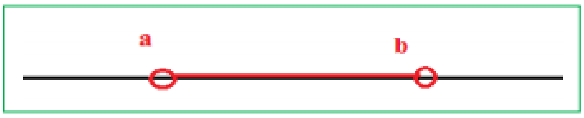
- Propiedades valor absoluto: libro pág. 14

6. Intervalos y entornos

Un intervalo de números reales es un conjunto de números correspondientes a una parte de la recta numérica, en consecuencia, un intervalo es un subconjunto del conjunto de los números reales.

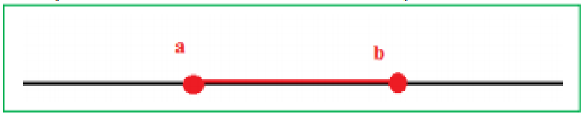
- **Tipos de intervalos**

Intervalo abierto: es aquel en el que los extremos no forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos forman parte del intervalo, salvo los propios extremos.



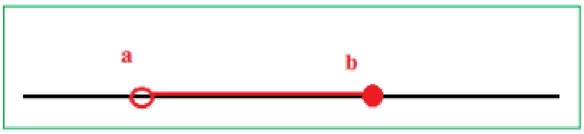
En otras palabras $I = (a, b) = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$, observa que se trata de desigualdades estrictas.
Gráficamente, lo representamos en la recta real del modo siguiente:

Intervalo cerrado: es aquel en el que los extremos si forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluidos éstos, forman parte del intervalo.



En otras palabras $I = [a, b] = \{x \in \Re \mid a \leq x \leq b\}$, observa que ahora no se trata de desigualdades estrictas.
Gráficamente:

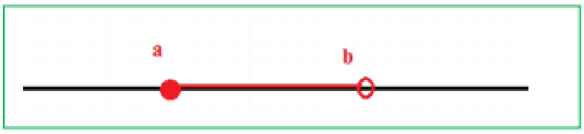
Intervalo semiabierto: es aquel en el que solo uno de los extremos forma parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluido uno de estos, forman parte del intervalo.



Intervalo semiabierto por la izquierda, el extremo inferior no forma parte del intervalo, pero el superior si, en otras palabras:

$$I = (a, b] = \{x \in \Re \mid a < x \leq b\},$$

observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.



Intervalo semiabierto por la derecha, el extremo superior no forma parte del intervalo, pero el inferior si, en otras palabras $I = [a, b) = \{x \in \Re \mid a \leq x < b\}$, observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.

7. Aproximaciones y errores

En muchas ocasiones es necesario hacer aproximaciones por motivos prácticos o trabajar con números aproximados por, entre otros motivos, no conocer los valores exactos. Así por ejemplo, si nos pesamos en una báscula y marca 54'4 Kg, ¿cuánto pesamos exactamente? No se puede saber, lo máximo que podemos decir es que nuestro peso está entre 54'3 y 54'5 Kg si el error máximo es de 100 g.

Error Absoluto

Se define el Error Absoluto (EA) como EA = $|valor\ real - valor\ aproximado|$.

Ejemplo:

- Si aproximamos $\pi \approx$ 3'1416 tendremos que el EA = $|\pi -$ 3'1416$|$ = $|$–00000073$|$ $\approx$ 0'0000073 unas 7 millonésimas. Observa que si no se conoce el valor real, no podemos calcular exactamente el error absoluto, pero si aproximarlo calculando una cota del error.

Error Relativo.

Para comparar errores de distintas magnitudes o números se define el Error Relativo (ER) como:

$$\text{ER} = \frac{EA}{|Valor\ real|}$$

que suele multiplicarse por 100 para hablar de % de error relativo.
Si no se conoce el valor real se sustituye por el valor aproximado (la diferencia normalmente es pequeña).

8. Notación científica

La notación científica se utiliza para escribir números muy grandes o muy pequeños.
Un número puesto en notación científica ***N* = *a'bcd*...·10*ⁿ*** consta de:

- ✓ Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (***a***).
- ✓ El resto de las cifras significativas puestas como parte decimal (*b c d*).
- ✓ Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número (10^n).

Si *n* es positivo, el número *N* es "grande"
Y si *n* es negativo, entonces *N* es "pequeño"

Ejemplos:

- 3'45 · 10^{14} (= 345000000000000): Número grande.
- 6'789 · 10^{-18} (= 0'000000000000000006789): Número pequeño.

Operaciones con notación científica

Para operar con números dados en notación científica se procede de forma natural, teniendo en cuenta que cada número está formado por dos factores: la expresión decimal y la potencia de base 10.

- ✓ Para **multiplicar** números en notación científica, se multiplican las partes decimales y se suman los exponentes de la potencia de base 10.
- ✓ Para **dividir** números en notación científica, se dividen las partes decimales y se restan los exponentes de la potencia de base 10.
- ✓ Si hace falta se multiplica o se divide el número resultante por una potencia de 10 para dejar con una sola cifra en la parte entera.

- ✓ Para **sumar o restar** números en notación científica, hay que poner los números con la misma potencia de base 10, multiplicando o dividiendo por potencias de base 10.
- ✓ Se saca factor común la potencia de base 10 y después se suman o restan los números decimales quedando un número decimal multiplicado por la potencia de 10.
- ✓ Por último si hace falta se multiplica o se divide el número resultante por una potencia de 10 para dejar en la parte entera una sola cifra.

9. Radicales

Un radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$

En la que n є N y a є R.

Si a es negativo, n ha de ser impar.

Simplificación de radicales

Si existe un número natural que divida al índice y al exponente (o los exponentes) del radicando, se obtiene un radical equivalente.

$$\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Reducción de radicales a índice común

1 Hallamos el **mínimo común múltiplo de los índices**, que será el común índice

2 **Dividimos el común índice por cada uno de los índices** y cada resultado obtenido **se multiplica por sus exponentes** correspondientes.

Extracción de factores fuera del signo radical

Se descompone el radicando **en factores**. Si:

Un **exponente es menor** que el índice, el factor correspondiente **se deja en el radicando**.

Un **exponente es igual** al índice, el factor correspondiente **sale fuera del radicando**.

Un exponente **es mayor que el índice**, **se divide** dicho exponente **por el índice**. El **cociente** obtenido es el **exponente del factor fuera** del radicando y el **resto** es el **exponente del factor dentro** del radicando.

Introducción de factores dentro del signo radical

Se introduce los factores elevados al índice correspondiente del radical.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n\, b}$$

Suma de radicales

Solamente pueden sumarse (o restarse) dos radicales cuando son radicales semejantes, es decir, si son radicales con el mismo índice e igual radicando.

$$a\sqrt[n]{k} + b\sqrt[n]{k} + c\sqrt[n]{k} = (a+b+c)\sqrt[n]{k}$$

Propiedades de los radicales

Producto de radicales

Radicales del mismo índice

Para multiplicar radicales con el mismo índice **se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice**.

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$$

Radicales de distinto índice

Primero se reducen a índice común y luego se multiplican.

Cociente de radicales

Para dividir radicales con el mismo índice **se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Radicales de distinto índice

Primero se reducen a índice común y luego se dividen.

Potencia de radicales

Para elevar un radical a una potencia **se eleva a dicha potencia el radicando y se deja el mismo índice.**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$$

Raíz de un radical

La raíz de un radical es otro radical de igual radicando y cuyo índice es el producto de los dos índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

Racionalizar radicales

Consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir tres casos.

1 Del tipo $\frac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}}=\frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}}=\frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2}=\frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\cdot c}$$

2 Del tipo $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m}\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m\cdot c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^n}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\cdot c}$$

3 Del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, y en general cuando el denominador sea un **binomio con al menos un radical.**

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)} = \frac{a\sqrt{b}-a\sqrt{c}}{\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\sqrt{b}-a\sqrt{c}}{b-c}$$

10. Logaritmos

- En cualquier base, el logaritmo de 1 vale 0.

- el logaritmo en base a del número a vale 1.

- en cualquier base, el logaritmo del producto de dos números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números:

- en cualquier base, el logaritmo del cociente de dos números positivos es igual a la diferencia de los logaritmos de dichos números.

- en cualquier base, el logaritmo de una potencia de base positiva es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

Ojo: Cambio de base

Nota: calculadora

11. Aplicaciones logaritmos

- pH
- crecimiento exponencial

…